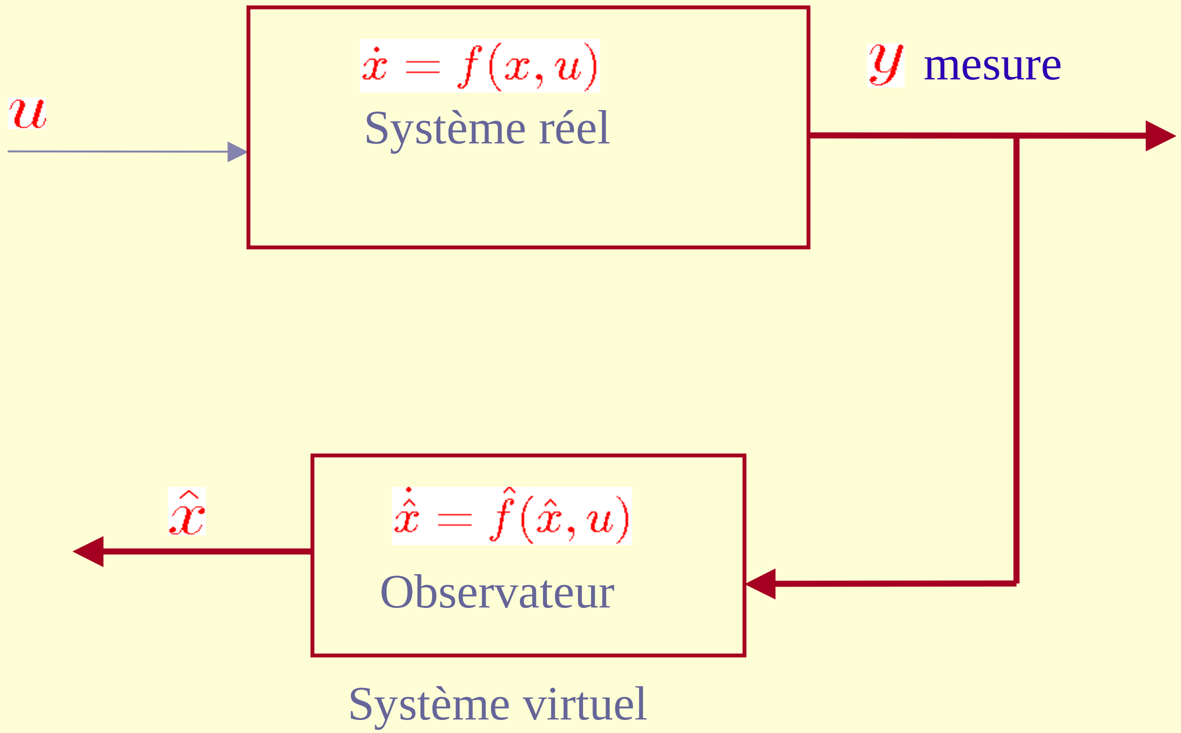
Linéarisation pour l'estimation

D. Boutat.
ENSI de Bourges Institut PRISME

Le plan de l'exposé

- Notion d'observateur
- Observateur avec erreur linéaire
- Notion d'observabilité
- Les systèmes dynamiques dont l'erreur d'observation est linéaire
  - ❖ Théorème de Krener et Isidori
  - ❖ Théorème de Krener et Respondek
  - ❖ L'immersion
  - ❖ Théorème de Fliess et Kupka
  - ❖ Forme dépendante de la sortie

Observateurs



$x(t_0) \approx \hat{x}(t_0)$

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

$\hat{x}(t)$ est un estimé asymptotique de $x(t)$

Synchronisation des deux systèmes

Observateur avec la dynamique de l'erreur linéaire

- Forme Canonique (Brunovsky) Non Linéaire

$$\begin{cases} \dot{z} = A_0 z + \beta(y,u) \\ y = C_0 z = z_n \end{cases}$$

même non dérivable

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & .. & 0 & 0 \\ 1 & 0 & .. & .. & 0 \\ 0 & 1 & 0 & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$z_i = \dot{z}_{i+1} - \beta_{i+1}(y,u)$$

$$C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & .. & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les états s'obtiennent par dérivations successives.

- Observateur (Luenberger)

$$\dot{\hat{z}} = A_0 \hat{z} + \beta(\hat{y},u) + K(y - \hat{y})$$

- Dynamique de l'erreur

$$e = z - \hat{z}$$

$$\dot{e} = (A_0 - KC_0)e$$

$$KC_0 = \begin{pmatrix} 0 & .. & .. & .. & k_0 \\ 0 & .. & .. & .. & k_1 \\ 0 & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & .. & .. & .. & k_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} k_0 & k_1 & .. & k_{n-1} & k_{n-1} \end{pmatrix}$$

Observateur à grand gains

- Forme dépendante de la sortie

$$\begin{cases} \dot{z} = A_{0d}(y,u)z + \beta(y,u) \\ y = C_0 z = z_n \end{cases}$$

$$z_i = \frac{1}{\alpha_i}(\dot{z}_{i+1} - \beta_{i+1}(y,u))$$

$$A_{0d}(y,u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & .. & 0 & 0 \\ \alpha_1(y,u) & 0 & .. & .. & 0 \\ 0 & \alpha_2(y,u) & 0 & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & \alpha_{n-1}(y,u) & 0 \end{pmatrix}$$

- Observateur associée

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}} &= A_{0d}\hat{z} + \phi(y,u) + \mathcal{D}^{-1}P_\rho^{-1}C_0^T(y - C_0\hat{z}), \\ 0 &= \rho P_\rho + A_{0d}^T P_\rho + P_\rho A_{0d} - C_0^T C_0, \end{aligned}$$

- Dynamique de l'erreur

$$\Delta = \mathrm{diag}\left[\frac{1}{\rho^{n-1}}, \frac{1}{\rho^{n-2}}, \ldots, \frac{1}{\rho}, 1\right]$$

$$A_{0d}(y,u) = \mathcal{D}^{-1}A_0\mathcal{D}$$

$$e = z - \hat{z}$$

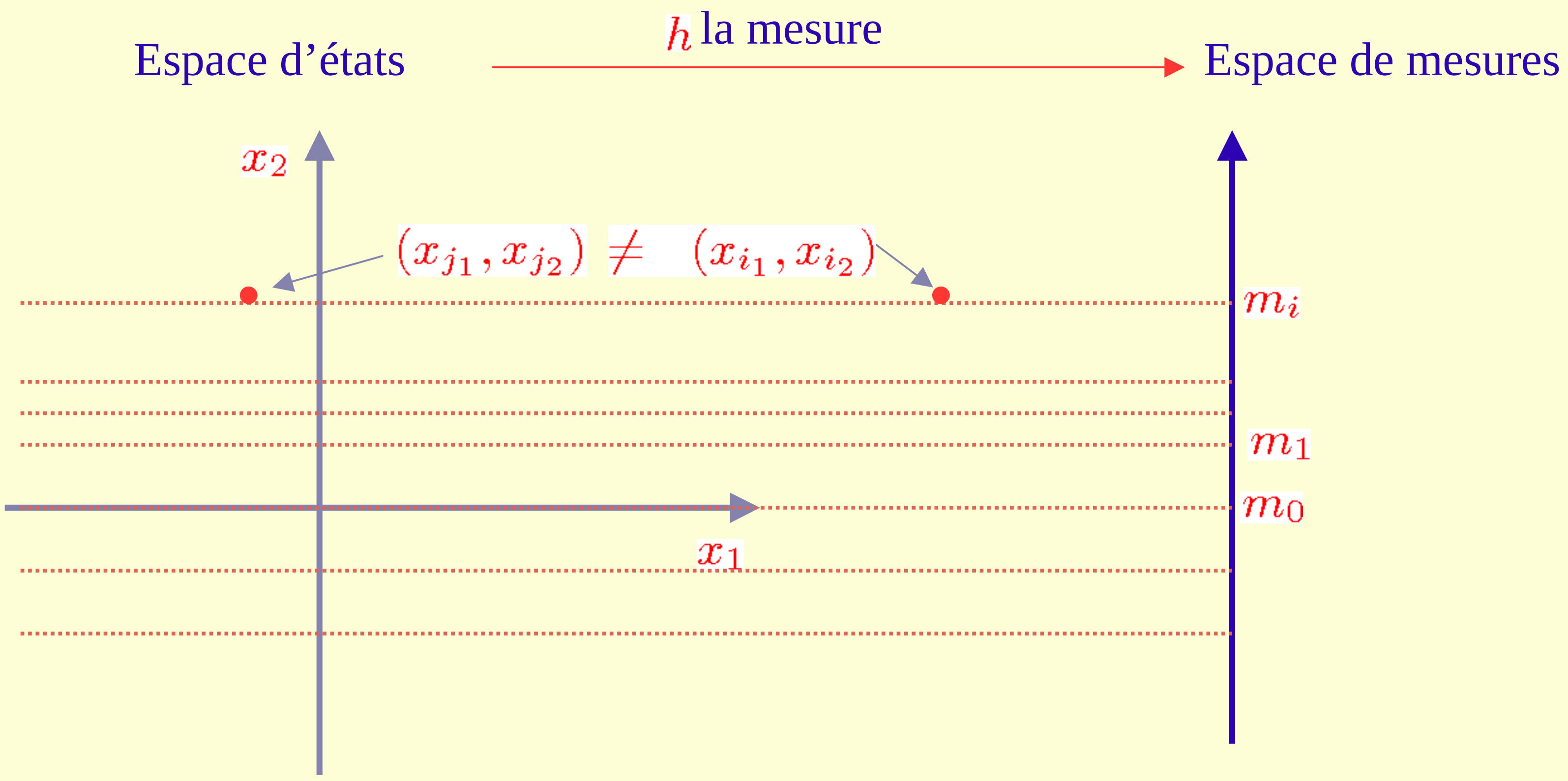
$$\tilde{e} = \mathcal{D}\Delta e$$

$$\dot{\tilde{e}} = \rho(A_0 - P^{-1}C^T C)\tilde{e} + \dot{\mathcal{D}}\mathcal{D}^{-1}\tilde{e}$$

$$\mathcal{D} = \mathrm{diag}\left[\prod_{k=1}^{n-1}\alpha_i, \prod_{k=2}^{n-1}\alpha_i, \ldots, \alpha_{n-1}, 1\right]$$

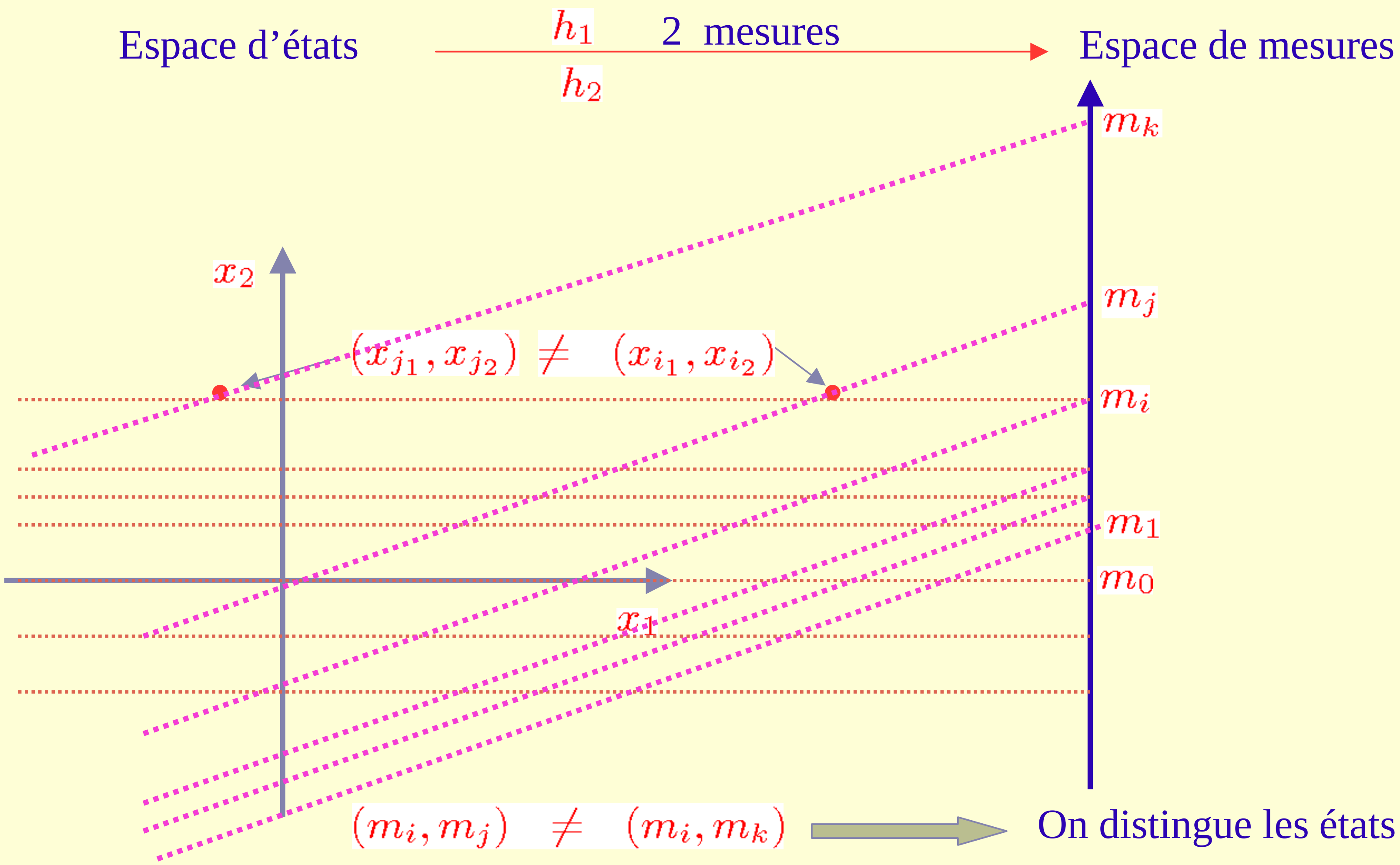
$$P_\rho(k,j) = \frac{(-1)^{k+j}C_{2n-k-j}^{n-j}}{\rho^{2n+2-k-j}}, \quad 1 \le k \le j \le n,$$

Observabilité



A chaque valeur de la mesure correspond plusieurs états :

problème on ne distingue pas les états.

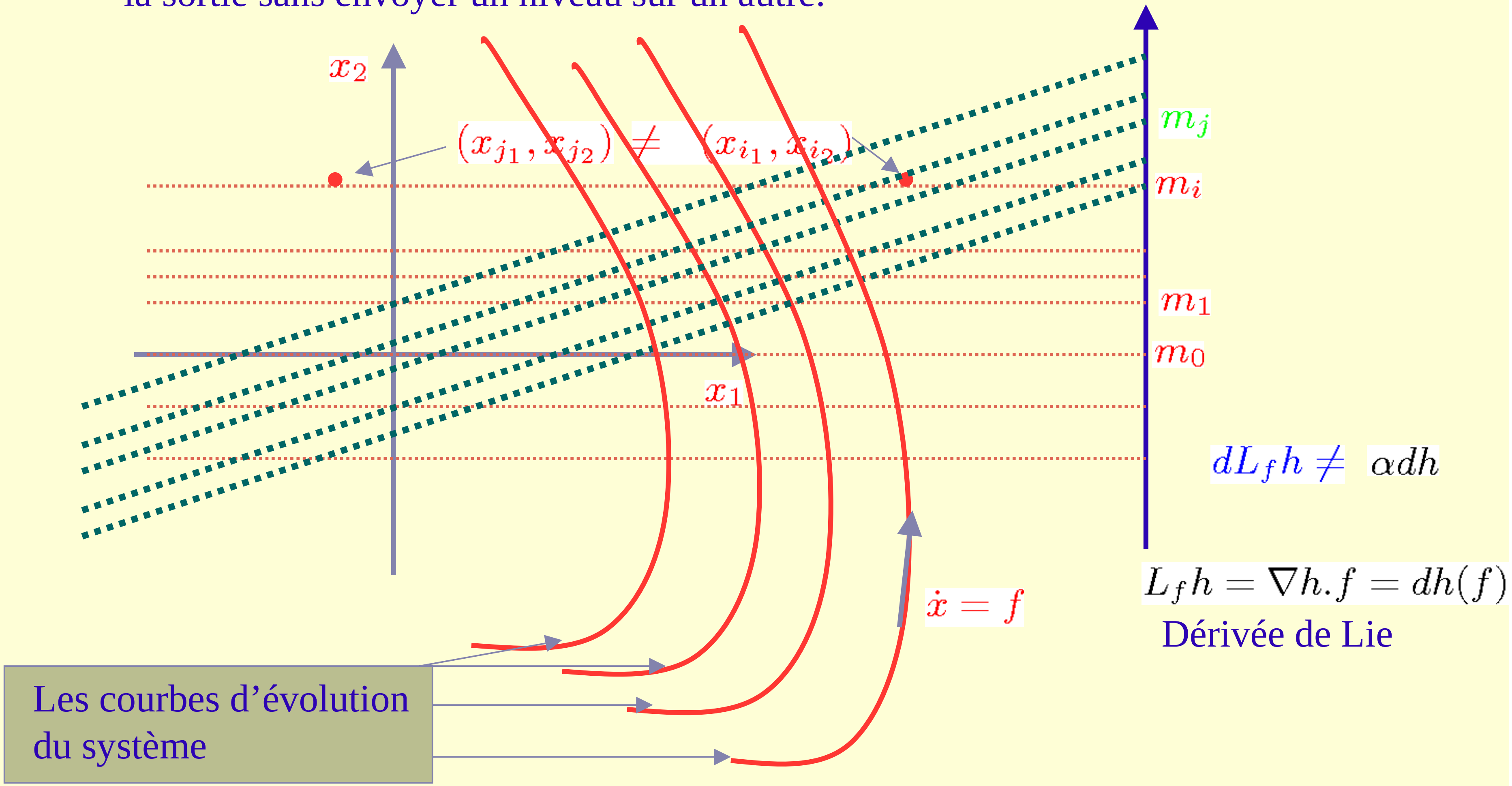


Les niveaux des deux mesures ne sont pas parallèles : $dh_1 \neq \alpha dh_2$

Problème on a besoin d'autant d'états que de mesures!!! Économie !!

Une connaissance (de l'évolution) du modèle du système peut elle diminuer le nombre de mesures?

1) Cas favorable : dynamique du système transverse aux courbes de niveaux de la sortie sans envoyer un niveau sur un autre.

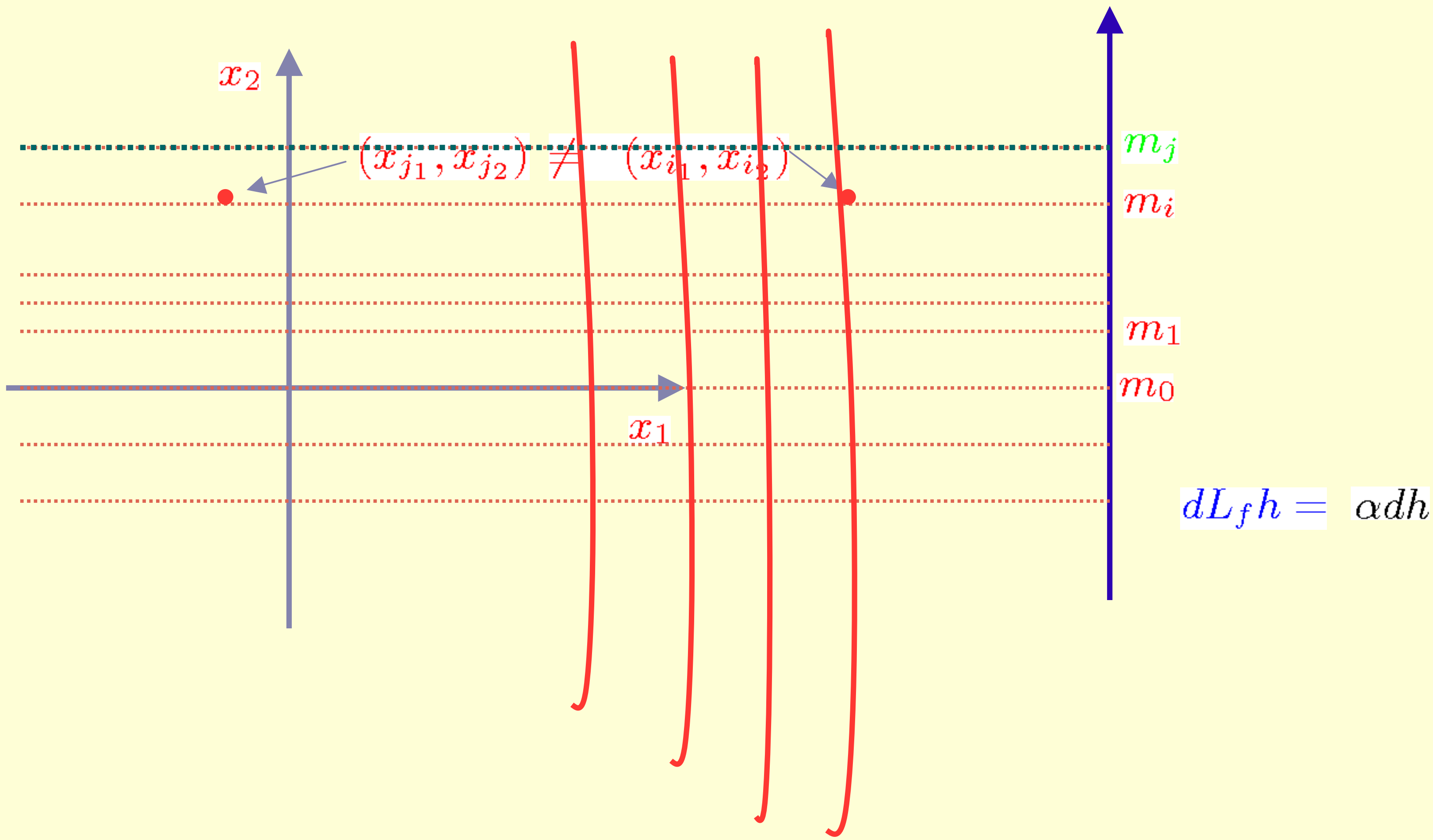


$L_f h = \nabla h . f = dh(f)$

Dérivée de Lie

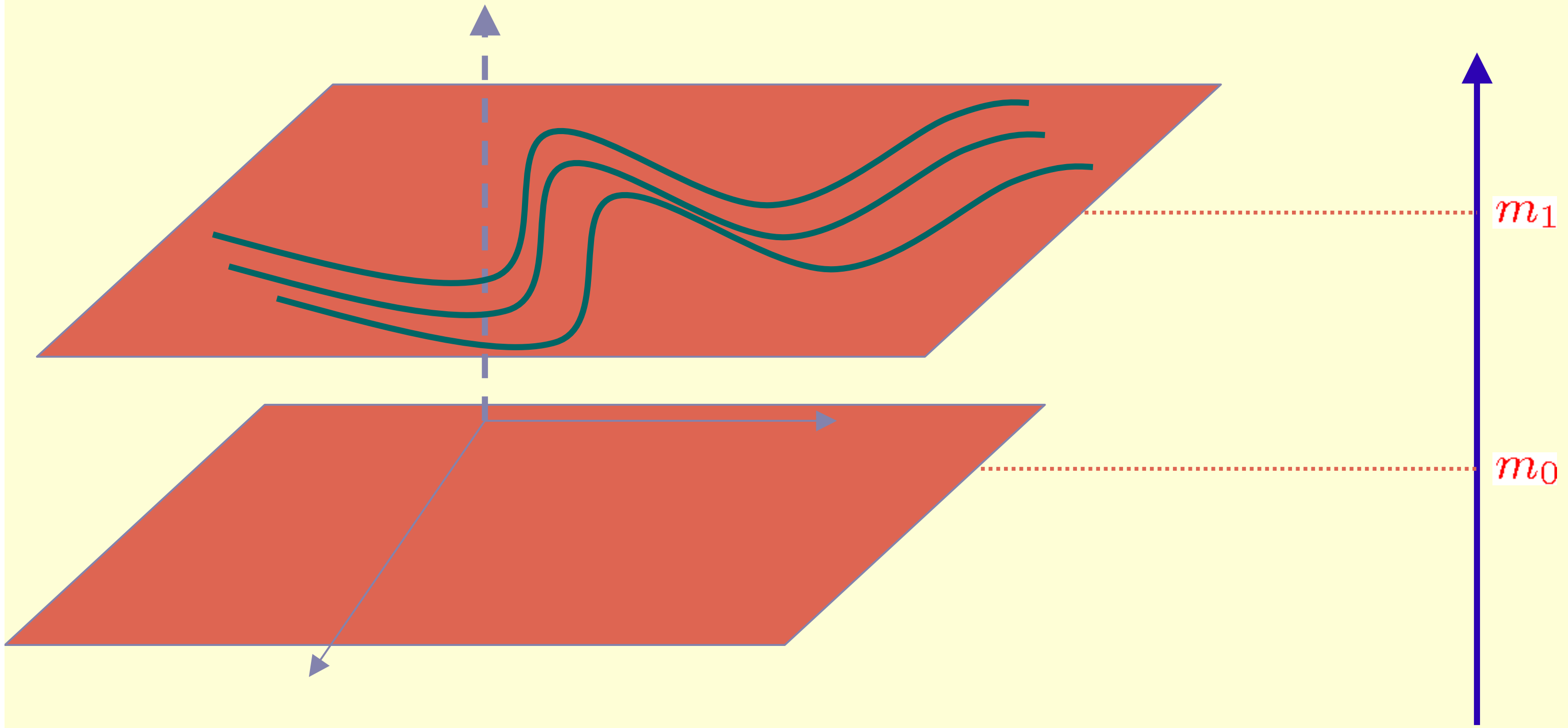
Une connaissance (de l’évolution) du modèle du système peut elle diminuer le nombre de mesures

1) Cas défavorables : dynamique du système envoie une des courbes sur l’autre.



Une connaissance (de l'évolution) du modèle du système peut elle diminuer le nombre de mesures

1) Cas défavorables : dynamique du système n'est pas transverse à l'une des courbes de niveaux



La mesure « ignore » l'évolution du système

Observabilité

- L'espace des observations

On appelle l'espace des observations d'un système dynamiques de la forme

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{x} = f(x,u) := f_u(x) \\ y = h(x) \end{array} \right.$$

$$\boxed{L_f(h) = \nabla h.f = dh(f) = \frac{dh}{dt} = \dot{h}}$$

l'espace vectoriel suivant

$$\mathcal{O} = \text{eng}\{L_{f_{u_k}} L_{f_{u_{k-1}}} \ldots L_{f_{u_1}} h \quad \text{pour} \quad u_1, .., u_k \in U\}$$

$$d\mathcal{O} = \text{eng}\{dl \quad l \in \mathcal{O}\}$$

- Le cas d'un système linéaire

$$d\mathcal{O} = \text{eng}\{CA^i\}_{0 \le i \le n-1}$$

- Observabilité : Condition de rang.

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{x} = Ax + \phi(y,u) \\ y = Cx \end{array} \right.$$

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \ldots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{dim(d\mathcal{O}) = n}$$

N'a pas de rôle

Systèmes dynamiques linéaires modulo la sortie

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \psi(y,u) \\ y = h(x) = Cx \end{cases}$$

même non dérivable

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \ldots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n$$

Polynôme caractéristique

$$P_A(\xi) = \xi^n + p_{n-1}\xi^{n-1} + \ldots + p_1\xi + p_0$$

le théorème de *Cayley-Hamilton* $P_A(A) = 0$

- Le changement de coordonnées

$z_n = Cx \longrightarrow \dot{z}_n = CAx + C\psi_n(y,u) = z_{n-1} - p_{n-1}y + \Phi_n(y,u)$

$z_{n-1} = CAx + p_{n-1}Cx \longrightarrow \dot{z}_n = z_{n-2} - p_{n-2}y + \Phi_{n-1}(y,u)$

$$z_{n-2} = CA^2x + p_{n-1}CAx + p_{n-2}Cx$$

$$z_{n-k} = CA^kx + p_{n-1}CA^{k-1}x + p_{n-2}CA^{k-2}x + \ldots + p_{n-k}Cx \qquad 1 \le k \le n-1$$

$$z_1 = CA^{n-1}x + p_{n-1}CA^{n-2}x + p_{n-2}CA^{n-3}x + \ldots + p_1Cx$$

$$\dot{z}_1 = CA^nx + p_{n-1}CA^{n-1}x + p_{n-2}CA^{n-2}x + \ldots + p_1CAx + \Phi_1(y,u)$$

$$= -p_0y + \Phi_1(y,u)$$

$$\begin{cases} \dot{z} = A_0z + \beta(y,u) \\ y = z_n \end{cases}$$

Systèmes dynamiques linéaires modulo la sortie

- <u>Matrice cyclique</u>

On cherche un (champ) vecteur τ_1 qui satisfait à :

$$\begin{cases} CA^i\tau_1 = 0 \qquad \text{pour} \quad i = 0 : n-2 \\ CA^{n-1}\tau_1 = 1 \end{cases}$$

puis on construit par induction des vecteurs τ_i par :

$$\tau_i = A\tau_{i-1} \qquad \text{pour} \quad i = 2 : n.$$

Avec $\tau = \{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$ est une base.

$$\Lambda = \mathcal{O}\tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & .. & 0 & 1 \\ 0 & 0 & .. & 1 & l_{2,n} \\ 0 & 0 & 1 & .. & .. \\ 0 & 1 & .. & .. & .. \\ 1 & l_{n2} & .. & .. & l_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$\omega := dz = \Lambda^{-1} d(\mathcal{O}x)$$

$$\int$$

$$l_{i,j} = CA^{i-1}\tau_j$$

Problème fondamental
dans le cas non linéaire

$$z = \Lambda^{-1}\mathcal{O}x$$

Exemple circuit de Chua

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha x_1 + \alpha x_2 - \delta f(y) \\ \dot{x}_2 = \beta x_1 - \beta x_2 + \gamma x_3 \\ \dot{x}_3 = -\mu x_2 \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ \beta & -\beta & \gamma \\ 0 & -\mu & 0 \end{pmatrix}$$

Changement de coordonnées

$$\begin{cases} z_3 = Cx = x_1 \\ z_2 = CAx + (\alpha + \beta)Cx = \beta x_1 + \alpha x_2 \\ z_1 = CA^2 x + (\alpha + \beta)CAx + \mu\gamma Cx = \alpha\gamma x_3 + \mu\gamma x_1 \end{cases}$$

La dynamique de Chua sous la forme canonique d'observabilité non linéaire

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \mu\gamma\left(-\alpha y - \delta f(y)\right) \\ \dot{z}_2 = z_1 - \beta\delta f(y) \\ \dot{z}_3 = z_2 - (\alpha + \beta)\, y - \delta f(y) \\ y = z_3 \end{cases}$$

Problème

Système non linéaire mono sortie :

$$\left\{\begin{array}{c} \dot{x} = f(x,u) \\ y = h(x) \end{array}\right.$$

Existe t-il un changement de coordonnées $z = T(x)$ explicites ?

$$\left\{\begin{array}{c} \dot{z} = A(y,u)z + \phi(y,u) \\ y = Cz \end{array}\right.$$

Systèmes dynamiques non linéaires

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases} \quad \text{sur} \quad U$$

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} dh = \theta_1 \\ dL_f h = \theta_2 \\ dL_f^2 h = \theta_3 \\ \dots \\ dL_f^{n-1} h = \theta_n \end{pmatrix} = n$$

Il existe un champ de vecteur τ_1 défini par :

$$\begin{cases} \theta_1(\tau_1) = 0 \\ \theta_2(\tau_1) = 0 \\ \dots \\ \theta_{n-1}(\tau_1) = 0 \\ \theta_n(\tau_1) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \quad \tau_i = [f, \tau_{i-1}] \quad i = 2 : n$$

$(= l(y) \neq 0)$

Forment une base du fibré tangent TU

$$\Lambda = \theta[\tau_1, \dots, \tau_n] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & 1 & * & \dots & \dots \\ 1 & * & \dots & \dots & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} TU \arrow[r, "\Lambda^{-1}\theta := \omega"] \arrow[d] & TU \arrow[d] \\ U \arrow[r, "\exists\psi?"] & U \end{tikzcd}$$

$$\omega = d\psi$$

$$\int$$

Problème d'intégration!

Un peu de géométrie différentielle

$$f_1 = \begin{pmatrix} f_{1,1} \\ f_{2,1} \\ f_{3,1} \\ \dots \\ f_{n,1} \end{pmatrix}$$

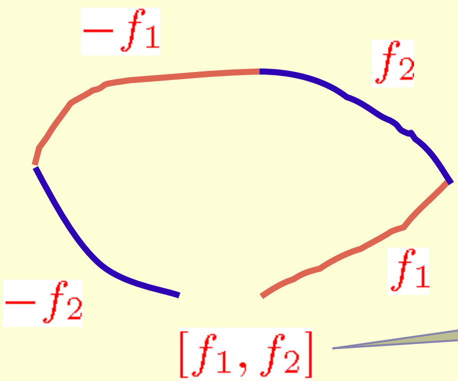
la dérivée de Lie d'une fonction h dans la direction de f_1

$$L_{f_1} h := dh(f_1) = f_{1,1}\frac{\partial h}{\partial x_1} + \dots + f_{n,1}\frac{\partial h}{\partial x_n}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} f_{1,2} \\ f_{2,2} \\ f_{3,2} \\ \dots \\ f_{n,2} \end{pmatrix}$$

Le crochet de Lie de f_1 par f_2

$$[f_1, f_2] = \begin{pmatrix} L_{f_1} f_{1,2} - L_{f_2} f_{1,1} \\ L_{f_1} f_{2,2} - L_{f_2} f_{2,1} \\ L_{f_1} f_{3,2} - L_{f_2} f_{3,1} \\ \dots \\ L_{f_1} f_{n,2} - L_{f_2} f_{n,1} \end{pmatrix}$$



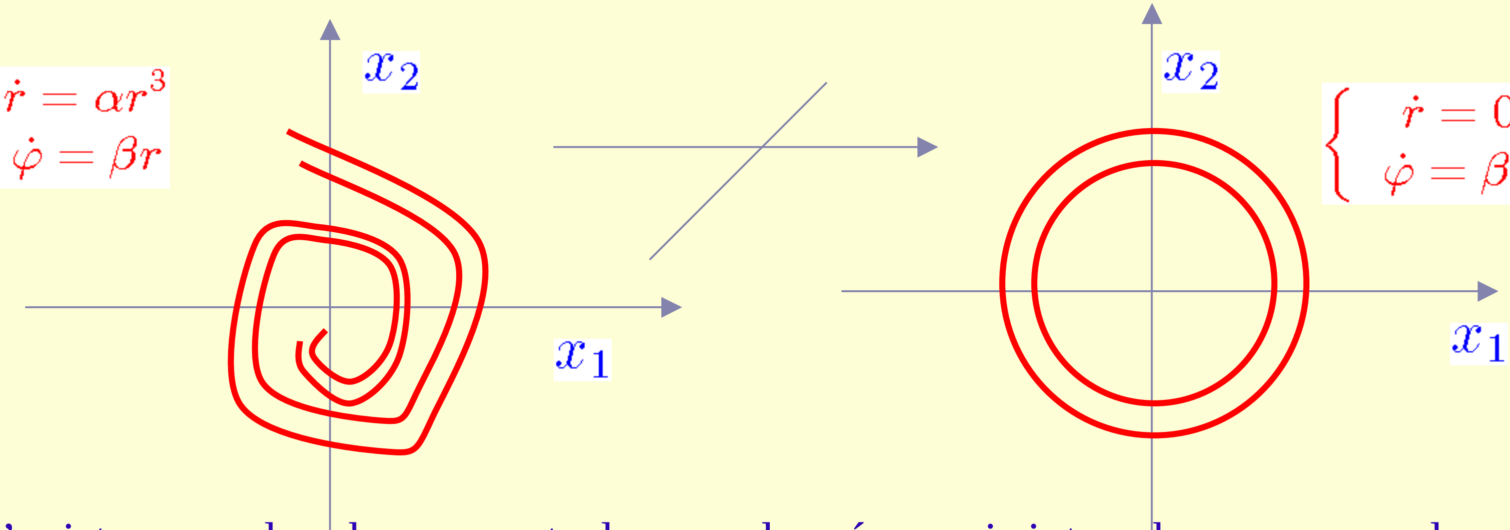
L'obstruction pour la fermeture

Exemple : obstruction à $\int$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\beta x_2 + \alpha x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = \beta x_1 + \alpha x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\beta x_2 \\ \dot{x}_2 = \beta x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r^3 \\ \dot{\varphi} = \beta r \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\varphi} = \beta r \end{cases}$$

Il n'existe pas de changement de coordonnées qui inter-change ces deux comportements. Ils ne sont pas topologiquement équivalents (ou conjugués)

Et pourtant il existe un isomorphisme qui inter-change les vitesses des deux comportements !!!

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{\beta} r^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha r^3 \\ \beta r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta r \end{pmatrix}$$

Exemple suite : obstruction à $\int$

On considère le repère suivant : $\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\tau_2 = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\beta} r^2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\omega = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{\beta} r^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\omega(\tau_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \omega(\tau_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le crochet de Lie $0 = [\omega(\tau_1), \omega(\tau_2)] \neq \omega([\tau_1, \tau_1]) = \begin{pmatrix} 2\frac{\alpha}{\beta} r \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\omega = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{\beta} r^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dr - \frac{\alpha}{\beta} r^2 d\varphi \\ d\varphi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

$$d\omega_1 = -2\frac{\alpha}{\beta} r dr \wedge d\varphi \neq 0$$

c'est-à-dire ω_1 n'est pas fermée : ce diagramme n'a pas de solution.

$$\begin{tikzcd} TU \arrow[r, "\Lambda^{-1}\theta := \omega"] \arrow[d] & TU \arrow[d] \\ U \arrow[r, "\exists\psi?"] & U \end{tikzcd} \qquad \omega = d\psi$$

Lemme d'intégrabilité

Considérer n formes linéairement indépendantes $\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \ldots\ldots \\ \omega_n \end{pmatrix} : TU \longrightarrow R^n \times R^n$

C'est un isomorphisme sur l'espace des champs de vecteurs

Considérer un repère $\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 & .. & \tau_n \end{pmatrix}$ tels que :

$$\omega(\tau) = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \ldots\ldots \\ \omega_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 & .. & \tau_n \end{pmatrix} = (\omega_i(\tau_j))_{1 \leq i,j \leq n}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & .. & .. & 0 \\ 0 & 1 & 0 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & .. & 1 \end{pmatrix}$$

Repère canonique

Lemme d'intégrabilité

Les assertions suivantes sont équivalente :

i) $d\omega_i = 0$ pour $1 \leq i \leq n$

ii) $[\tau_i, \tau_j] = 0$ pour $1 \leq i, j \leq n$

iii) Il existe un changement de coordonnées (locale) ϕ tel que :

$$\omega = d\phi$$

iv) ω est un isomorphisme de l'algèbre de Lie

Démonstration

$$d\omega(\tau_i, \tau_j) = L_{\tau_i}(\omega(\tau_j)) - L_{\tau_j}(\omega(\tau_i)) - \omega([\tau_i, \tau_j])$$

comme $\omega(\tau_i) = cst$ et $\omega(\tau_j) = cst$

alors $$\boxed{d\omega(\tau_i, \tau_j) = -\omega([\tau_i, \tau_j])}$$

Théorème de mise sous la forme canonique non linéaire d'observabilité

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases} \xrightarrow[z = \phi(x)\ ?]{\text{localement}} \begin{cases} \dot{z} = Az + \beta(y) \\ y = z_n \end{cases}$$

FCNO

À chaque système dynamique observable est associé naturellement un repère τ et un isomorphisme ω tels que :

$$\omega(\tau) = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}\right)$$ Repère canonique

En outre on a : $\tau_{i+1} = [\tau_i, f]$

Théorème Krener & Isidori

Il existe ϕ si et seulement si $[\tau_i, \tau_j] = 0$

si et seulement si $d\omega_i = 0$

Démonstration

- Il reste à voir c'est quoi le transformé $\omega(f)$?

$$\frac{\partial}{\partial z_i}\omega(f) = [\frac{\partial}{\partial z_i}, \omega(f)] = [\omega(\tau_i), \omega(f)]$$

Comme ω est intégrable on a :

$$= [\omega(\tau_i), \omega(f)] = \omega([\tau_i, f]) = \omega(\tau_{i+1}) = \frac{\partial}{\partial z_{i+1}}$$

D'où

$$\omega(f) = z_1 \frac{\partial}{\partial z_2} + .. + z_{n-1}\frac{\partial}{\partial z_n} + \beta(z_n)$$

Exemple 1

On considère le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ \dot{x}_3 = x_2 \\ y = x_3 \end{cases}$$

Les 1-formes d'observabilité sont données par :

$\theta_1 = dx_3 \quad \theta_2 = dx_2 \quad \theta_3 = dx_1$

Le repère de KI est donné par :

$$\left.\tau_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \tau_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \tau_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_1}\right\} \Rightarrow [\tau_i, \tau_j] = 0$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x_3 \end{pmatrix}, \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} -x_3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \omega = \Lambda^{-1}\theta = \begin{pmatrix} dx_1 - x_3 dx_3 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$$

$d\omega = 0$

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} z_1 = x_1 - \frac{1}{2}x_3^2 \\ z_2 = x_2 \\ z_3 = x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{z}_1 = 0 \\ \dot{z}_2 = z_1 \\ \dot{z}_3 = z_2 \\ y = z_3 \end{cases}$$

Exemple 2

On considère le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ y = \sin x_2 \end{cases}$$

Les 1-formes d'observabilité sont données par :

$\theta_1 = \cos x_2 dx_2$ $\qquad$ $\theta_2 = \cos x_2 dx_1 - x_1 \sin x_2 dx_2$

Le repère de KI est donné par :

$$\tau_1 = \frac{1}{\cos x_2}\frac{\partial}{\partial x_1} \qquad \tau_2 = \frac{1}{\cos x_2}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{\cos x_2}(x_2 - x_1 \tan x_2)\frac{\partial}{\partial x_1}$$

mais $\quad [\tau_1, \tau_2] = -2\frac{1}{\cos^2 x_2}\tan x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \neq 0$

$$\tilde{\tau}_1 = l(y)\tau_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \qquad \tilde{\tau}_2 = [\tilde{\tau}_1, f] = \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \qquad [\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2] = 0$$

$$\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & l \\ l & x_2 \cos x_2 - x_1 \sin x_2 \end{pmatrix} \qquad \tilde{\omega} = \begin{pmatrix} dx_1 - x_2 dx_2 \\ dx_2 \end{pmatrix}$$

$d\tilde{\omega} = 0$

$$\begin{pmatrix} z_1 = x_1 - \frac{1}{2}x_2^2 \\ z_2 = x_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \dot{z}_1 = 0 \\ \dot{z}_2 = z_1 \\ \tilde{y} = z_2 = \arcsin(y) \end{cases}$$

Forme canonique non linéaire avec difféomorphisme sur la sortie

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases} \xrightarrow[z = \phi(x)\ ?]{\text{localement}} \begin{cases} \dot{z} = Az + \beta(\tilde{y}) \\ \tilde{y} = z_n = \psi(y) \end{cases}$$

FCNODS

On considère le repère de KI et on regarde les relations suivantes :

n pair $\quad [\tau_1, \tau_k] = 0 \quad k = 2 : n-1$ et $[\tau_1, \tau_n] = \alpha(y)\tau_1$

n impair $\quad [\tau_1, \tau_n] = [\tau_j, \tau_k] = 0 \quad j = 1 : 2$ et $k = 2 : n-1$ et $([\tau_2, \tau_n] - \alpha(y)\tau_2) \in \mathrm{eng}\,\tau_1$

⇒ Difféomorphisime $\psi(y)$

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ \tilde{y} = \tilde{h}(x) = \psi(y) \end{cases}$$

Théorème Krener & Respondek

Système (1) se met sous la forme FCNODS si et seulement si

(2) se met sous la forme FCNO KI

Exemple Système de Rössler

On considère le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + \alpha x_2 \\ \dot{x}_3 = \delta + x_3\left(x_1 - \beta\right) \\ y = x_3 > 0 \end{cases}$$

$$\delta > 0$$

$$[\tau_1, \tau_2] = [\tau_1, \tau_3] = 0$$

$$[\tau_2, \tau_3] - \frac{1}{x_3}\tau_2 \in \text{eng}\{\tau_1\}$$

$$\xi_1 = x_1, \quad \xi_2 = x_2 \qquad \xi_3 = \ln(y)$$

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = -\xi_2 - e^{\xi_3} \\ \dot{\xi}_2 = \xi_1 + \alpha \xi_2 \\ \dot{\xi}_3 = \xi_1 + \delta e^{-\xi_3} - \beta \\ \overline{y} = \xi_3 \end{cases} = A\xi + \phi(y)$$

$$\begin{cases} z_3 = C\xi = \xi_3 \\ z_2 = CA\xi - \alpha C\xi = \xi_1 - \alpha \xi_3 \\ z_1 = CA^2\xi - \alpha CA\xi + C\xi = -\xi_2 - \alpha\xi_1 + \xi_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \phi_1(\overline{y}) \\ \dot{z}_2 = z_1 + \phi_2(\overline{y}) \\ \dot{z}_3 = z_2 + \phi_3(\overline{y}) \\ \overline{y} = z_3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{c} \phi_1 = (\delta - \alpha)\, e^{-\overline{y}} - \beta \\ \phi_2 = -\overline{y} - e^{\overline{y}} - \alpha\left(\delta e^{-z_3} - \beta\right) \\ \phi_3 = -\alpha\overline{y} + \delta e^{-\overline{y}} - \beta \end{array} \right)$$

Forme canonique non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases}$$

Immersion

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ \dot{w} = \eta(y, w) \end{cases}$$

$z = \phi(x, w)$?

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + \beta(\tilde{y}) \\ \tilde{y} = z_n = \psi(y, w) \end{cases}$$

FCNOI

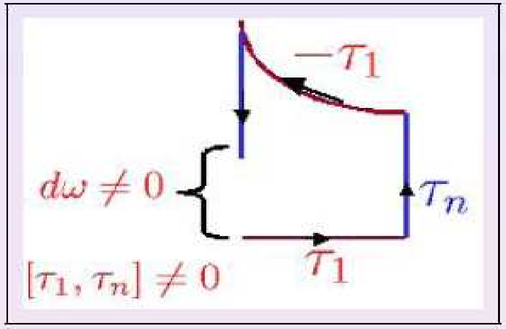
Dépendante de la sortie

$z = \phi(x)$?

$$\begin{cases} \dot{z} = A(y)z + \phi(y) \\ h(y) = z_n \end{cases}$$

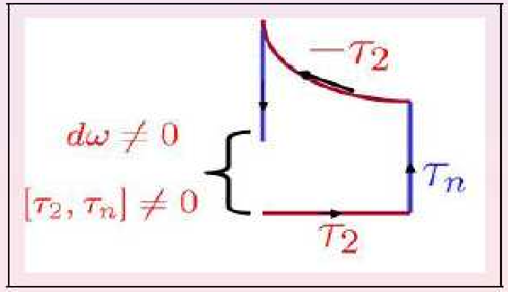
pour n pair

$$\begin{aligned}[\tau_1, \tau_k] &= 0 \text{ pour } 1 \leq k \leq n-1 \\ [\tau_1, \tau_n] &= \alpha(y)\tau_1\end{aligned}$$



pour n impair

$$\begin{aligned}[\tau_1, \tau_k] &= 0 \text{ pour } 1 \leq k \leq n \\ [\tau_2, \tau_k] &= 0 \text{ pour } 1 \leq k \leq n-1 \\ ([\tau_2, \tau_n] &- \alpha(y)\tau_2) \in \text{eng}\{\tau_1\}.\end{aligned}$$



Difféomorphisme $\psi(y)$ $\quad (2) \begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ \tilde{y} = \tilde{h}(x) = \psi(y) \end{cases}$

$\tau_1^1 = l(y)\tau_1$ avec $\psi'(y) = \dfrac{1}{l(y)}$ $\qquad \tau_i^1 = [\tau_{i-1}^1, f] \quad \text{pour} \quad i = 2 : n$

S'ils commutent alors on a théorème KR. Sinon on pose $\tau_i = \tau_i^1$

Si le repère $\{\tau_i\}_{1\leq i\leq n}$ n'est pas commutatif et si :

- pour n impair

$$[\tau_1, \tau_k] = 0 \text{ pour } 1 \leq k \leq n$$
$$[\tau_2, \tau_n] = \alpha(y)\tau_1$$

- pour n pair

$$[\tau_1, \tau_k] = 0 \text{ pour } 1 \leq k \leq n$$
$$[\tau_2, \tau_k] = 0 \text{ pour } 1 \leq k \leq n$$
$$([\tau_3, \tau_n] - \alpha(y)\tau_2) \in \text{eng}\{\tau_1\}$$

Une équation différentielle qui permet de déterminer une fonction $l(w)$ de la variable auxiliaire w . Puis on construit la famille (le repère) suivant :

$\tau_1^1 = l(w)\tau_1$ $\tau_i^1 = [\tau_{i-1}^1, F]$ pour $i = 2 : n$

T_{n+1}

$$T_{n+1} = [\tau_n, F]?$$

Théorème d'immersion

Si le nouveau repère commute :

$$[\tau_i^1, \tau_j^1] = 0 \qquad [\tau_i^1, T_{n+1}] = 0$$

alors il existe $z = \phi(x, w)$ qui transforme $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ \dot{w} = \eta(y, w) \end{cases}$

en

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + \beta(\tilde{y}) \\ \tilde{y} = z_n = \psi(y, w) \end{cases}$$

Exemple immersion

On considère le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ \dot{x}_3 = x_2 \\ y = x_2 \end{cases}$$

Les 1-formes d'observabilité sont données par :

$\theta_1 = dx_3 \qquad \theta_2 = dx_2 \qquad \theta_1 = dx_1$

Le repère de KI est donné par :

$$\tau_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \qquad \tau_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \qquad \tau_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} + (x_3^2 - x_2)\frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$[\tau_2, \tau_3] = -2\frac{\partial}{\partial x_1} = -2\tau_1 \neq 0$$

$\dot{w} = y$

$$\tau_1^1 = l(w)\tau_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \qquad \tau_2^1 = \left[\tau_1^1, f + x_3 \frac{\partial}{\partial w}\right] = l(w)\tau_2 - x_3 l'(w)\tau_1$$

$$\tau_3^1 = l(w)\tau_3 - 2x_3 l'(w)\tau_2 + (x_2 l'(w) + x_3^2 l''(w))\tau_1$$

$$[\tau_2^1, \tau_3^1] = (-2l^2 + 2ll')\tau_1 = 0$$

$l(w) = e^{w}$ $\quad z_3 = e^{-w} x_3$ $\quad z_2 = e^{-w} x_2 + \frac{1}{2} e^{-w} x_3^2$ $\quad z_1 = e^{-w} x_1$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = 0 \\ \dot{z}_2 = z_1 - \frac{1}{2} e^{2w} z_3^3 \\ \dot{z}_3 = z_2 - \frac{3}{2} e^{w} z_3^2 \\ \dot{w} = e^{w} z_3 \end{cases}$$

Forme dépendante de la sortie

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{z} = A(y,u)z + \phi(y,u) \\ h(y) = z_n \end{array} \right.$$

$$A(y,u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & .. & 0 & 0 \\ \alpha_1(y,u) & 0 & .. & .. & 0 \\ 0 & \alpha_2(y,u) & 0 & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & \alpha_{n-1}(y,u) & 0 \end{pmatrix}$$

A partir du repère KI $\{\tau_i\}_{1\leq i\leq n}$, on construit un nouveau repère par

$$\tau_1^1 = (\Pi\alpha_i)\tau_1$$

$$\tau_i^1 = \frac{1}{\alpha_{i-1}}[\tau_{i-1}^1, A(y,u)z] \qquad \text{pou} \quad i = 2:n$$

Théorème de Linéarisation par Immersion :

Fliess et Kupka (1983 SIAM J. C&O Num 21)

Soit $\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = h(x) \end{cases}$ un système dynamique analytique. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- ❖ Le système est immergeable dans un système dynamique bilinéaire de la forme
$$\begin{cases} \dot{\xi} = A\xi + \sum_{i=1}^{p} u_i B_i \xi + Bu \\ y = C\xi \end{cases}$$

- ❖ L'espace des observations $\mathcal{O}$ du système dynamique est de dimension finie sur $\mathbb{R}$