INSA de Rouen
Département Energétique et propulsion
Enseignement Thermodynamique et Machines Thermiques (A. Coppalle)

ETUDE DE LA COMPRESSIBILITE DE L'EAU

1°) (question de cours)

Rappeler la définition des coefficients calorimétriques c_v, c_p, l et k.

En appliquant les deux premiers principes, *établir les relations suivantes* pour les coefficients calorimétriques l, c_p et c_v .

$$l = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v \quad \text{et} \quad c_p - c_v = l\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$$

2°) les coefficients thermo-élastiques χ_t et α sont définis par :

$$\chi_T = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P$$

2°)-a *calculer la différence c_p-c_v en fonction de T, v, χ_t et α*

2°)-b On donne pour l'eau : c_p= 4.18 10^3 ; α= 3 10^{-4} ; χ_t= 5 10^{-10}, ρ= 10^3 (SI et à 293 K).

Calculer à 293 K l'écart relatif entre c_p et c_v .

3°) Variation de la masse volumique ρ de l'eau avec la pression.

3°)-a Pour une masse m d'eau fixée, *donner l'expression* de

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T = f(\chi_T, \rho)$$

3°)-b Soit une colonne d'eau de hauteur z et de température constante. En intégrant la relation ci-dessus, *donner la relation*

$$\frac{\rho(z}{\rho o} = f(P(z), Po, \chi_T)$$

en supposant que χ_t est constant. P(z) est la pression en z et Po la pression en z=0 ; ρ(z) la masse volumique en z et ρo celle en z=0.

Donner la limite de cette expression avec χ_t<<1. (Rappel si X<<1 ; e^X= 1.+X+…)

3°)-c La loi de l'hydrostatique est

dP=-ρ(z) g dz

Intégrer cette relation entre 0 et z, avec α_T<<1

Montrer que la différence de pression ΔP=Po-P(z) peut se mettre sous la forme :

$$\Delta P = Po - P(z) = \rho o\ g\ z + \delta\Delta P,$$

le premier terme de droite est la différence de pression si ρ=cst et $\delta\Delta$P est un terme correctif que l'on exprimera en fonction de χ_t et ΔP.

(Rappel si X<<1 ; Ln(1+X)= X-X^2/2+…)

En prenant z= 10 km, *donner l'ordre de grandeur de la correction relative $\delta\Delta P/\Delta P$* à apporter au terme ρo g z (ρo=10^3 ; g=10 (SI))

Réponses

1°) soit δq une quantité de chaleur échangée par un système compressible et dilatable :

$dq = c_v\, dT + l\, dv$ ou $dq = c_p\, dT + k\, dP$

-donc $du = cv\, dT + (l-P)dv$

$ds = cv\, dT/T + l dv/T$

du et ds sont des différentielles totales exactes : $\left(\frac{\partial l-P}{\partial T}\right)_v = \left(\frac{\partial cv}{\partial v}\right)_T$ et $\left(\frac{\partial cv/T}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial l/T}{\partial T}\right)_v$

donc $l = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v$

- Faisons intervenir cp : $du = cv\, dT + (l-P)dv$

$du = cp\, dT + kdP - Pdv$

on a $dv = \frac{\partial v}{\partial T}\, dT + \frac{\partial v}{\partial P}\, dP$, en remplaçant dans du, on obtient $cp - cv = l\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P$

2°-a) $cp - cv = l\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P$ ===> $cp - cv = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v \alpha v$

On a $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_P \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T = -1$ ===> $cp - cv = T\,\alpha^2\, v\,/\chi_T$

2°-b) $\frac{cp-cv}{cv} = 0{,}0126$

3°-a) $\rho = 1/v$, donc $\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T = \chi_T \rho$

3°-b) si T=cst ===> $d\rho/\rho = \chi_T dP$ ===> $\rho(z)/\rho_o = \exp[\chi_T(P(z) - Po)]$

Si $\chi_T \ll 1$, $\rho(z)/\rho_o = 1 + \chi_T(P(z) - Po)$

3°-c) $dP = -\rho\, gdz = -\rho_o\,[1 + \chi_T(P(z) - Po)]\, gdz$ ===> $\mathrm{Ln}[1 + \chi_T(P(z) - Po) = -\rho_o\, \chi_T\, gz$

Avec l'approximation de l'énoncé : $\chi_T(P(z) - Po) - \left(\chi_T(P(z) - Po)\right)^2/2 = -\rho_o\, \chi_T\, gz$

===> $\delta\Delta P = \left(\chi_T(P(z) - Po)\right)^2/2$, $\delta\Delta P/\Delta P = \rho_o\, \chi_T\, gz/2 = 2{,}5\ 10^{-3}$