INSA de Rouen
Département Energétique et propulsion
Enseignement Thermodynamique et Machines Thermiques (A. Coppalle)

Compression isotrope d'un gaz

Rappels

Soit δq la chaleur échangée (par unité de masse).
On définit les coefficients calorimétriques c_v , c_p, l et k par

$$\delta q = c_v dT + l dv \quad \text{et} \quad \delta q = c_p dT + k dP$$

On rappelle que $l = T \left.\frac{\partial P}{\partial T}\right|_v$ *et* $k = -T \left.\frac{\partial v}{\partial T}\right|_P$

Cas du gaz parfait :

Rappeler l'équation d'état massique du gaz parfait. On note r=R/M la constante massique des gaz parfaits.
(R= 8,32 (SI) et M masse molaire du gaz)
-*en utilisant l'équation d'état, montrer qu'on a*

$$l = p\ ;\ k = -v \text{ et } c_p - c_v = r$$

Compression réversible et adiabatique d'un gaz parfait

1°) *Rappeler l'équation d'état massique du gaz parfait.*
On note r=R/M la constante massique des gaz parfaits. R= 8,32 (SI) et M masse molaire du gaz
-*en utilisant l'équation d'état, montrer que :*

$$l = p\ ;\ k = -v \text{ et } c_p - c_v = r$$

2°) *Montrer que* $\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dv}{v} = 0$ *avec* $\gamma = c_p/c_v$

3°) $\gamma = c_p/c_v$ est constant.
En intégrant la relation ci-dessus, Montrer que $P v^\gamma = Ks$*, ou Ks est une constante*

4°) γ = cp/cv n'est plus constant mais dépend de T,
: $\gamma = gT + \gamma_0$ avec g et γ_0 deux constantes.
Montrer que l'on peut écrire

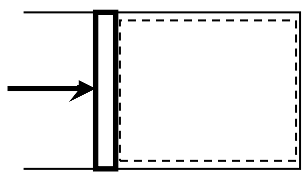
$$\frac{dPv}{Pv} + \left(\frac{g}{r}Pv + \gamma_O - 1\right)\frac{dv}{v} = 0 \qquad (a)$$

Vérifier que $\frac{1}{Pv\,(\frac{g}{r}Pv+\gamma_O-1)} = \left[\frac{1}{Pv} - \frac{\frac{g}{r}}{(\frac{g}{r}Pv+\gamma_O-1)}\right]\frac{1}{(\gamma_0-1)}$ $\qquad (b)$

Déduire des relations (a) et (b) : $\frac{P\,v^\gamma}{(\gamma-1)} = K'_s$ *, ou* K'_s *est une constante.*

Calcul du travail échangé entre les états 1 et 2

Le gaz parfait effectue une compression adiabatique réversible entre les états 1 et 2.



Etat initial : P1, T1 et v_1
Etat final : P2, T2 et v_2

5°) *Rappeler l'expression de* c_v *en fonction de* γ *et r*

6°) On suppose que γ = cst.
En appliquant le premier principe (pour un système fermé),
Calculer, en fonction de T1 et T2, le travail échangé par le gaz.$W_{1\text{-}2}$.

7°) Application numérique : $v_2 = v_1/10$; P1 = 10^5 Pa ; T1 = 300K ;
γ = 1.4 et r= 8,32/0,029 J/Kg/K (cas de l'air).
- *Calculer la valeur de.*$W_{1\text{-}2}$.

8°) γ = cp/cv n'est plus constant mais dépend de T : $\gamma = gT + \gamma_0$ avec g et γ_0 deux constantes.
Calculer la nouvelle expression du travail échangé par le gaz, en fonction de γ_{T1} *et* γ_{T2}.

Compression réversible et adiabatique d'un gaz de Van Der Wall

L'équation d'état massique d'un gaz de Van Der Walls est donnée par

$$\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = rT$$

Ce gaz effectue une compression entre les états 1 et 2 (voir schéma ci-dessus)

9°) *Montrer que :* $l = \frac{rT}{v-b}$

On suppose que c_v est constant et est toujours donné par $c_v=r/(\gamma-1)$

On cherche la relation qui relie P et v (Rappel Pv^γ =Ks est vrai dans le cas du gaz parfait)

10°) *En exprimant que l'échange de chaleur est nul, montrer que l'on a la relation*

$T\,(v-b)^{\gamma-1} = K_s''$, ou K_s'' est une constante

11°) En déduire la relation

$$\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b)^\gamma = rK_s''$$

Réponses

Compression réversible et adiabatique d'un gaz parfait

1°) Pv=rT, en utilisant les relations donnant l et k on retrouve l=P et k=-v

On dh=cp dT

= du+dPv=cvdT+drT

===> cp-cv=r

2°) $\delta q=0$ ===> cvdT+Pdv

$\delta q=0$ ===> cpdT-vdP

===> γ = -v/P dP/dv donc dP/P+γ dv/v=0

3°) Ln(P)= -γ Ln(v)+cst ===> Ln(Pv$^\gamma$)= cst ===> Pv$^\gamma$= K_s

4°) le résultat du 2°) ne change pas, dP/P+γ dv/v=0

$\frac{dP}{P} + (gT + \gamma_O)\frac{dv}{v} = 0$ ===> $vdP + (g\frac{Pv}{r} + \gamma_O)Pdv = 0$

Mais vdP=dPv-Pv

Donc $dPv + (g\frac{Pv}{r} + \gamma_O - 1)Pdv = 0$

En divisant par Pv : $\frac{dPv}{Pv} + (g\frac{Pv}{r} + \gamma_O - 1)\frac{dv}{v} = 0$

La relation $\frac{1}{Pv\,(\frac{g}{r}Pv+\gamma_O-1)} = \left[\frac{1}{Pv} - \frac{\frac{g}{r}}{(\frac{g}{r}Pv+\gamma_O-1)}\right]\frac{1}{(\gamma_0-1)}$ est facile à montrer

Pour intégrer, on écrit $\frac{dPv}{Pv(g\frac{Pv}{r}+\gamma_O-1)} = -\frac{dv}{v}$, avec la relation précédente

===> $\frac{dPv}{Pv} - \frac{\frac{g}{r}dPv}{(g\frac{Pv}{r}+\gamma_O-1)} = -(\gamma_O - 1)\frac{dv}{v}$

En intégrant : $Ln(Pv) - Ln\left(g\frac{Pv}{r} + \gamma_O - 1\right) = -Ln\left(v^{(\gamma_O-1)}\right) + cst$

===> $\frac{Pv^\gamma}{g\frac{Pv}{r}+\gamma_O-1} = K_S'$ ===> $\frac{Pv^\gamma}{\gamma-1} = K_S'$

Calcul du travail échangé entre les états 1 et 2

5°) cp-cv=r ===> cv=r/(γ-1)

6°) du=cvdT=δw, en intégrant avec cv=cst ===> $w_{1-2} = c_v(T_2 - T_1)$

7°) A.N. : $w_{1\text{-}2}$= 324,9 10^3 J

8°) du= cvdT=δw= r/(γ-1)dT, car la relation cp-cv=r est toujours vrai.

$w_{1-2} = \int_{T_1}^{T_2}\frac{r}{\gamma-1}dT = \int_{T_1}^{T_2}\frac{r}{gT-\gamma_0-1}dT$===> $w_{1-2} = \frac{r}{g}Ln(\frac{\gamma_2-1}{\gamma_1-1})$

Compression réversible et adiabatique d'un gaz de Van Der Wall

9°) $= \frac{rT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$, $l = T\frac{\partial P}{\partial T}\Big|_v$ ===> $l = \frac{rT}{v-b}$

10°) $\delta q=c_vdT+ldv=0$ ===> c_vdT= -rdv/(v-b)

Ln(T)= -r/c_v Ln(v-b)+cst, on a cv=r/(γ-1) ===> $T\,(v-b)^{\gamma-1} = K_s''$

11°) $\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = rT = \frac{rK_s''}{(v-b)^{\gamma-1}}$ ===>$\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b)^\gamma = rK_s''$