

EQUATION D'ETAT POUR UN GAZ REEL

Des mesures ont montré que pour un gaz les coefficients α (dilatation isobare) et χ (compressibilité isotherme) sont données par:

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{A}{AT + BP} \quad \chi = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{P} - \frac{1}{AT + BP}, \text{ A et B sont des constantes connues.}$$

-Montrer que l'équation d'état du gaz est donnée, pour une mole, par

$$PV = RT + (BR/A) P$$

ou R est la constante des gaz parfaits. Pour établir cette relation, on se rappellera que le gaz se comporte comme un gaz parfait aux faibles pressions. ($PV \rightarrow RT$ quand $P \rightarrow 0$).

Réponse

Rappel

L'équation d'état d'un fluide dilatable et compression est donnée par la relation $f(P,T,V)=0$.

C'est une surface dans l'espace (P,T,V)

Elle peut aussi s'exprimer sous la forme $PV = PV(P,T)$. P et T sont alors les deux variables indépendantes servant à caractériser le fluide.

$$\text{On } dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dT + \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T dP = \alpha V dT - \chi V dP = \frac{AV}{AT+BP} dT - \left(\frac{1}{P} - \frac{B}{AT+BP} \right) V dP$$

$$\text{On intègre par rapport à T le terme en t: } \frac{dV}{V} = \frac{A}{AT+BP} dT$$

$$\text{On obtient } \ln(V) = \ln(AT+BP) + g(P)$$

$$\left(\frac{\partial \ln V}{\partial P} \right)_T = \frac{B}{AT+BP} + \frac{\delta g(P)}{\delta P} \implies \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = V \left[\frac{B}{AT+BP} + \frac{\delta g(P)}{\delta P} \right]$$

$$-\chi V = -\frac{1}{P} + \frac{B}{AT+BP} = V \left[\frac{B}{AT+BP} + \frac{\delta g(P)}{\delta P} \right] \implies \frac{\delta g(P)}{\delta P} = -\frac{1}{P} \implies g(P) = \ln(P) + \text{cst}$$

$$\text{On obtient pour } \ln(V): \ln(V) = \ln(AT+BP) - \ln(P) + \text{cst}$$

$$\text{Ce qui s'écrit : } \ln(V) = \ln[(AT+BP)/P] + \ln(\text{cst})$$

$$\text{Soit } PV = (AT+BP)\text{cst}$$

$$\text{Si } P \rightarrow 0, PV = AT\text{cst}, \text{ mais on a un gaz parfait } PV = RT, \text{ on obtient } \text{cst} = R/A$$

$$\text{L'équation d'état est: } PV = RT + BR/A P$$

Rq: le coefficient calorifique l de ce gaz est égal à celui du gaz parfait.