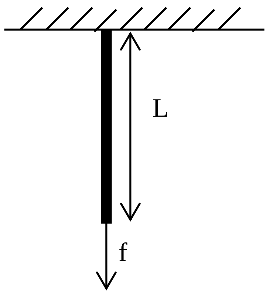
INSA de Rouen
Département Energétique et propulsion
Enseignement Thermodynamique et Machines Thermiques (A. Coppalle)

Etude thermodynamique d'un fil métallique

Soit un fil métallique de section s, de longueur L, qui est soumis à une traction f.



On donne :
le coefficient de dilatation thermique (linéaire)

$$\alpha = \frac{1}{L_0}\frac{\partial L}{\partial T}\bigg|_P \text{ supposé constant ;}$$

le module d'Young

$$E_T = \frac{L_0}{s}\frac{\partial f}{\partial L}\bigg|_T \text{ supposé constant.}$$

T est la température, L0 la longueur 'à vide' du fil (quand f=0). La section s est constante.
La masse volumique du fil est ρ.

On décide de choisir les variables T et f pour caractériser l'état thermodynamique du fil.

Rappel : Le travail élémentaire échangé par le fil pour un déplacement dL est δW= f dL.

1) *Montrer, à l'aide du premier principe, que la fonction thermodynamique G=U-fL-TS est bien la fonction énergétique associée aux variables T et f.* (Il est recommandé de calculer et de donner sa différentielle)
2) Soit δQ la chaleur échangée. On pose δQ= m cf dT + Kdf avec m la masse du fil
- *A l'aide des fonctions G et de S, montrer que :*

$$K = T\frac{\partial L}{\partial T}\bigg|_f$$

3) *En déduire l'expression de K en fonction de T, α et L0.*

4) *En vous aidant de la différentielle de la fonction L=L(T,f), montrer que l' équation d'état est donnée par*

$$L = L0(1+\alpha(T-T0) + f/(E_T\, s)) \;;$$

L0 est la longueur 'à vide' à la température T0.
5) *montrer que cf est indépendant de f.*
6) On réalise une traction adiabatique réversible de Δf=40 N.
- *Calculer la variation de température ΔT qui est apparaît lors de cette transformation Faire l'application numérique.*
Pour les applications numériques:T0= 20°C, ρ=8 10^3 ; α= 1,2 10^{-5} ; s= 10^{-6} ; cf=460; (SI)

Etude thermodynamique d'un fil élastique

Soit un fil caoutchouc de section s, de longueur L, auquel on fait subir des tractions f.

Par rapport au cas du fil métallique, la section s ne peut plus être considérée comme constante.

On définit le coefficient de dilatation thermique (linéaire) α et le module d'Young E_T.

$$\alpha = \frac{1}{L_0}\frac{\partial L}{\partial T}\Big|_P \ ; E_T = L_0 \frac{\partial \sigma}{\partial L}\Big|_T \text{ avec } \sigma\text{=f/s la contrainte}$$

Les propriétés de l'élastomère sont telles que E_T n'est pas constant et il dépend à la fois de T et de la longueur L.

$$E_T = 10^4 T\left(1+2\left(\frac{L0}{L}\right)^3\right)$$

1°) calculer la contrainte σ en fonction de T, L et L0.

2°)En supposant que la contrainte σ qui est appliquée reste constante, calculer l'expression littérale de la variation de la longueur δL quand la température varie de δT.

- Quel est le phénomène auquel on assiste quand on chauffe le fil ($\delta T>0$)?

Réponses

Rq : ces deux exercices ont pour but de faire travailler sur des systèmes utilisant d'autres variables d'état que (T,P) ou (T,V)

Etude thermodynamique d'un fil métallique

1°) G=U-fL-TS===> dG=-SdT-Ldf, G=G(T,f)

2°) dS= m c_f dT/T+K df/T, avec la relation précédente et en se rappelant que dG et dS sont des différentielles totales exactes :

$$K = T\frac{\partial S}{\partial f}\Big|_T \text{ et } \frac{\partial S}{\partial f}\Big|_T = \frac{\partial L}{\partial T}\Big|_F \Longrightarrow K = T\frac{\partial L}{\partial T}\Big|_F$$

3°) K=T α L_0

4°) $dL = \frac{\partial L}{\partial T}\Big|_f dT + \frac{\partial L}{\partial f}\Big|_T df = L_0\, \alpha\, dT + L_0/(sE_T)\, df$

Comme α, s et E_T sont constants, l'intégration est directe et on retrouve l'équation d'état.

5°) dS= m c_f dT/T+K df/T,

dS est une différentielle totale exacte : $m\frac{\partial Cf/T}{\partial f}\Big|_T = \frac{\partial K}{\partial T}\Big|_F \Longrightarrow \frac{\partial Cf}{\partial f}\Big|_T = 0$

6°) dS= 0 ===> dT/T = - α L_0/ (m c_f) df ===> Ln(1+$\Delta T/T_0$) = - α L_0/ (m c_f) Δf ,

$\Delta T \approx - \alpha\, T_0/(\rho\, s\, c_f)\, \Delta f = -3{,}8\ 10^{-2}$ °C

Etude thermodynamique d'un fil élastique

1°) $E_T = 10^4 T[1 + 2\left(\frac{L}{L_0}\right)^3]$ donc $\frac{\partial\sigma}{\partial L}\Big|_T = 10^4 \frac{T}{L_0}[1 + 2\left(\frac{L}{L_0}\right)^3]$

On intègre à T=cst ===> $\sigma = 10^4 T\left[\frac{L}{L_0} - \left(\frac{L}{L_0}\right)^2\right] + \varphi(T)$

Quand L=L_0 on f=0 donc φ(T)=0, $\sigma = 10^4 T\left[\frac{L}{L_0} - \left(\frac{L}{L_0}\right)^2\right]$

2°) dσ =0 ===> $\frac{\delta L}{L} = -\frac{\left[\left(\frac{L}{L_0}\right)^3 - 1\right]}{\left[\left(\frac{L}{L_0}\right)^3 + 2\right]}\frac{\delta T}{T}$

Si $\delta T>0$ ====> $\delta L<0$, le fil se raccourcit.

Rq : le coefficient de dilatation thermique α ne peut plus être considéré constant, comme dans le cas du fil métallique. On montre que $\alpha = \frac{1}{E_T}\frac{\partial\sigma}{\partial T}\Big|_L$ avec $\frac{\partial\sigma}{\partial T}\Big|_L = 10^4[\frac{L}{L_0} - \left(\frac{L}{L_0}\right)^2]$