INSA de Rouen
Département Energétique et propulsion
Enseignement Thermodynamique et Machines Thermiques (A. Coppalle)

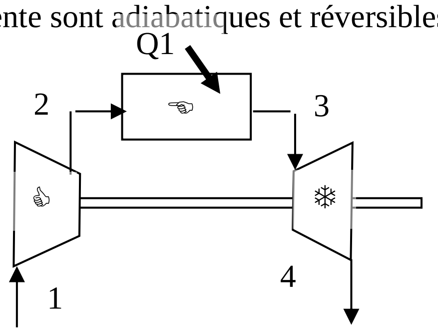
Cycles Réels d'une Turbine à Gaz

Préliminaires
Au cours d'une transformation réversible, un kilogramme de gaz échange la quantité de chaleur

$$\delta Q = c_p\, dT + k\, dP$$

Avec T la température, v le volume d'une mole et P la pression.
-Donner, pour cette transformation, la variation dh de l'enthalpie et ds de l'entropie en fonction de dT, dP. et des coefficients calorimétriques
- Montrer que k est fonction de T et de la dérivée de v en fonction de T.
-En déduire la valeur de k pour un gaz parfait?
- Rappeler le 1er principe pour un système ouvert et stationnaire qui produit un travail sur un arbre
- En déduire l'expression de travail utile δW^u échangé pour une transformation infinitésimale dp

LE CYCLE IDEAL DE BRAYTON
le gaz est de l'air que l'on assimile à *un gaz parfait* dont la capacité calorifique c_p est constante.
Le schéma ci-dessous donne les éléments d'une turbine utilisée pour produire du travail. La compression et la détente sont adiabatiques et réversibles. Les échanges de chaleur se font à pression constante.



C compresseur
T Turbine
E1 Echangeur
P1=P4=1 atm

1°-a) *donner, pour l'unité de masse, l'allure d'un cycle sur le diagramme (P,v) et (T,s).*
1°-b) *Montrer que le rendement théorique* $\eta_{théo} = -W_{net} / Q_1$ *de cette installation est donné par*

$$\eta_{théo} = (1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2})$$

En déduire l'expression littérale de $\eta_{théo}$ *en fonction de rp (le rapport des pressions r=P2/P1) et de* $\gamma = c_p/c_v$
Rappel : W_{net} est le travail récupéré sur l'arbre de la turbine
A.N. : calculer $\eta_{théo}$ pour γ=1,4, r=8

LE CYCLE AVEC UN COMPRESSEUR ET UNE TURBINE REELS
le gaz est de l'air que l'on assimile à *un gaz parfait* dont la capacité calorifique c_p est constante.
A cause des irréversibilités qui se produisent dans le compresseur et la turbine, le cycle réel est différent du cycle idéal de Brayton.
On définit les efficacités adiabatiques de la turbine et du compresseur par

$$\eta_c = \frac{W_{s,c}}{W_{a,c}} \quad \text{et} \quad \eta_T = \frac{W_{a,T}}{W_s, T},$$

où Ws est le travail échangé dans le cas d'une transformation adiabatique et réversible et Wa le travail échangé dans la transformation adiabatique réelle.
2°-a) *donner l'allure du cycle réel*, représenté par les points 1, 2', 3, 4', sur le diagramme (T,s)
2°-b) *Calculer les températures des points 2' et 4' sachant que* $\eta_c=0{,}8$ *et* $\eta_T=0{,}85$.
Faire les applications numériques avec rp=8, T1=300K, T3=1150K, γ=1,4.
2°-c) *Calculer le rendement* $\eta_{réel}=-W_{net}/Q1$ *de cette installation*.
Faire les applications numériques avec rp=8, T1=300K, T3=1150K, γ=1,4.

Enthalpie de l'air considéré comme un gaz réel.
On cherche à savoir si l'approximation 'gaz parfait' est justifiée avec les conditions de fonctionnement de la turbine à gaz.
3°-a) *Montrer que l'enthalpie massique du gaz réel est donnée par*

$$h(T,P)=h_{gp}(T)+\int_0^P \left(v-T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\right)dP\,;$$ ou h_{gp} est l'enthalpie du gaz parfait à T

3°-b) Le gaz vérifie l'équation d'état suivante
L'équation d'état du gaz est
Pv= RT + B P. ; le paramètre B est constant
Calculer l'enthalpie du gaz réel en fonction de l'enthalpie du gaz parfait (pris dans les mêmes conditions de T et P) et de la pression P
3°-c) 1 kg d'air se détend dans la turbine et sa pression passe de P_3 à P_1
A la pression P_1, le gaz est supposé parfait.
Calculer la valeur numérique de la correction $\Delta h_{réel} - \Delta h_{gp}$
Donner la valeur du rapport $\Delta h_{réel}/\Delta h_{gp}$ *. Conclusion ?*
Pour les applications numériques, on donne
r=P3/P1= 8, P1= 1. 10^5 Pa ; T1=300K, T3=1150K, B= 0,103 10^{-2} (SI), c_p=1004 (SI)

Etude de la détente polytropique de l'air considéré comme un gaz parfait
On définit r_{gp} la constante massique des gaz parfait pour l'air.
1 kg d'air se détend dans la turbine et sa pression passe de P_3 à P_1
La détente est réversible mais polytropique. Cela veut dire que des échanges de chaleurs se produisent au cours de la détente. L'analyse des transformations réelles subies par le gaz montre qu'elles peuvent être représentées dans le diagramme (v, P) par une nouvelle loi de détente de la forme

$$Pv^n = cst,$$

ou n est le coefficient polytropique (déterminé par l'expérience).
4°-a) *Exprimer le travail utile* w^u *échangé au cours de la transformation* en fonction de n, T3, T4 et r_{gp}
- *Faire l'application numérique* avec n=1,45 , Ti=1150K, r=8,32/0,029 (SI) et P3/P4=8..
- *Comparer au cas ou la détente est isentrope*, avec γ=1.4
4°-b) Montrer que la chaleur échangée s'écrit $q^{poly}= c_n(T_2-T_1)$, ou c_n est le coefficient calorimétrique de la transformation polytropique. *Exprimer* c_n *en fonction de n,* c_p *et r.*

Réponses

Préliminaires

$dh = \delta Q + \delta W + dPv = cp\, dT + (k+v)dP$

$ds = cp\, dT/T + kdP/T$

Rappel, on considère pour h que T et P sont les deux variables indépendantes pour décrire le système

dh est une différentielle totale exacte : $\partial(k+v)/\partial T = \partial cp/\partial P$

ds est une différentielle totale exacte : $\partial(cp/T)/\partial P = \partial(k/T)/\partial T$

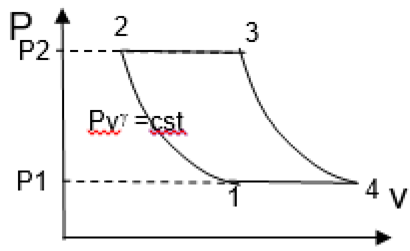
$\Longrightarrow k = -T\, \partial v/\partial T$

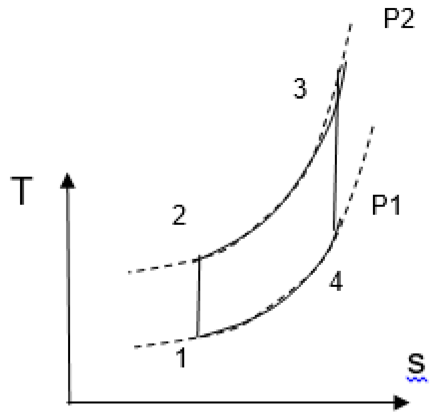
Application au cas du gaz parfait : $v = rT/P \Longrightarrow k = -v$

1er principe pour un système ouvert et stationnaire : $dh = \delta Q + \delta W^u$, avec δW^u le travail recueilli sur l'arbre de la machine

$\delta W^u = vdP$

1°-a)



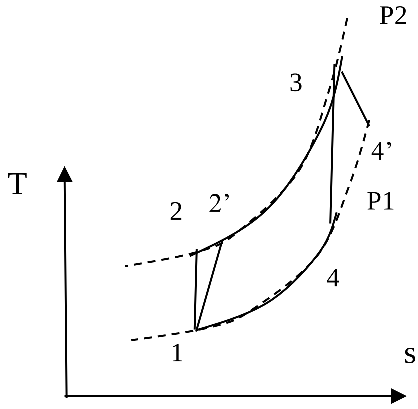


1°-b) $W_{net} = -[(h3-h4)-(h2-h1)]$, $Q_1 = h3-h2$

Pour un gaz parfait h=cp T +cst : $\eta_{théo} = 1-(T4-T1)/(T3-T2)$.

Pour une transformation adiabatique réversible $P^{1-\gamma}T^{\gamma} = cst \Longrightarrow \eta_{théo} = 1-r^{(1-\gamma)/\gamma} = 0{,}448$

2°-a)



2°-b) Avec les hypothèses de l'énoncé : $\eta_c = (T2-T1)/(T2'-T1)$ et $\eta_T = (T4'-T3)/(T4-T3)$

$\Longrightarrow T2' = T1\,[1+(r^{(\gamma-1)/\gamma}-1)/\eta_c] = 604{,}3$ K et $T4' = T3\,[1+(r^{(1-\gamma))/\gamma}-1)\,\eta_T] = 712{,}1$ K

2°-c) $\eta_{réel} = 1-(T4'-T1)/(T3-T2') = 24{,}5\%$

3°-a) D'après l'étude préliminaire : $dh = cp\,dT + (k+v)dP \Longrightarrow dh = dh_{gp} + (v - T\,\partial v/\partial T)dP$

En intégrant de 0 à P, on obtient la relation

3°-b) En utilisant l'équation d'état dans le calcul du coefficient k , on obtient $v - T\,\partial v/\partial T = B$

$h(T,P) = h_{gp}(T) + B\,P$

3°-c) $\Delta h_{réel} = h(T_f, P_f) - h(T_i, Pi) = h_{gp}(T_4) - h(T_3, P_3)$

$\Delta h_{réel} = h_{gp}(T_4) - (h_{gp}(T_3) + B\,P_3) = \Delta h_{gp} - B\,P_3 \Longrightarrow$ la correction vaut $B\,P_3 = 0{,}824\ 10^3$ (SI)

$\Delta h_{gp} = cp\,(T4-T3)$ et $T4 = T3\ r^{(1-\gamma)/\gamma} \Longrightarrow \Delta h_{réel}/\Delta h_{gp} = 1 - B\,P3/\Delta h_{gp} = 1 - 1{,}5\ 10^{-3}$

Correction négligeable, pour une détente d'une dizaine de bars,
l'air se comporte comme un gaz parfait

4°-a) D'après l'étude préliminaire : $\delta W^u = vdP$

Et on a $Pv^n = cst$ ===> en intégrant de 3 à 4, on obtient : $W^u_{poly} = n/(n-1)\, r_{gp}\,(T4-T3)$

$T4 = T4 = T3\ 8^{(1-\gamma)/\gamma} = 603$ K ===> $W^u_{poly} = -505{,}6$ kJ

Cas de la détente isentrope dans la turbine $W^u_{iso} = r_{gp}\,(634{,}8-1150) = 517{,}3$ kJ

4°-b) On écrit $Q_{poly} = c_n\,(T4-T3)$

On. $\Delta h = c_p\,(T4-T3)$, donc $Q_{poly} = \Delta h - W^u_{poly} = [c_p - n/(n-1)\, r_{gp}]\,(T4-T3)$

$c_n = c_p - n/(n-1)\, r_{gp}$

Pour un gaz parfait : $cp - cv = r_{gp}$, donc $r_{gp} = cp\ \gamma/(\gamma-1)$ ===> $c_n = c_p\,(n-\gamma)/[(n-1)\gamma]$

Rq : avec $n=1{,}45$, $Q_{poly} < 0$ au cours de la détente