

ETUDE DE LA VAPEUR D'EAU,
APPLICATION A UN MOTEUR A VAPEUR

Questions de cours

1°) Enthalpie libre massique $g(T,P)$

A partir de la définition de g et en utilisant le premier principe, retrouver la relation liant dg à dT et dP .

2°) La formule de Clapeyron relie la chaleur latente de vaporisation L_{vap} aux paramètres d'état P, v, T .

$$L_{vap} = T(v_v - v_l) \left(\frac{dP_{vap}}{dT} \right),$$

v_v et v_l sont les volumes massiques de la vapeur et du liquide, T la température et $P_{vap}(T)$ la pression de vapeur à l'équilibre.

Démontrer cette relation en utilisant l'enthalpie libre g d'un mélange liquide-vapeur. Pour cela on définira un cycle entre deux isothermes à T et $T+dT$.

Pour la suite :

- on donne la chaleur latente de vaporisation de l'eau

$$L_{vap} = 3335 - 2,91 T \text{ (KJ/Kg)},$$

- la relation empirique de Rankine

$$\ln(P_{vap}(\text{atm})) = A - 5120 / T(K)$$

- l'eau bout sous 1atm à 373 K et 1 atm = 10^5 Pa ;

- constante des gaz parfaits $R = 8,32$ (SI) et masse molaire de l'eau $M_{H_2O} = 0,018$ (SI)

Erreur relative de l'hypothèse 'gaz parfait' pour la vapeur d'eau

3°) *Calculer la valeur numérique de A dans la formule de Rankine.*

4°) *A partir de la formule de Clapeyron et en utilisant la relation de Rankine, calculer la valeur numérique du volume massique de la vapeur d'eau à 293 K.*

Pour le calcul on négligera v_l devant v_v .

5°) *calculer la valeur du volume massique de la vapeur d'eau à 293 K en utilisant la loi des gaz parfaits. Donner l'écart relatif de cette valeur par rapport à la précédente.*

Application à l'étude d'un moteur à vapeur d'eau

Cette application reprend toutes les données et approximations des questions précédentes.

On désire faire un moteur à vapeur en utilisant l'énergie solaire. Le moteur fonctionne en trois temps : 1-Chauffage et vaporisation à volume constant avec l'énergie solaire, c'est une phase de compression 2- détente isentropique, 3- condensation de la vapeur à pression constante.

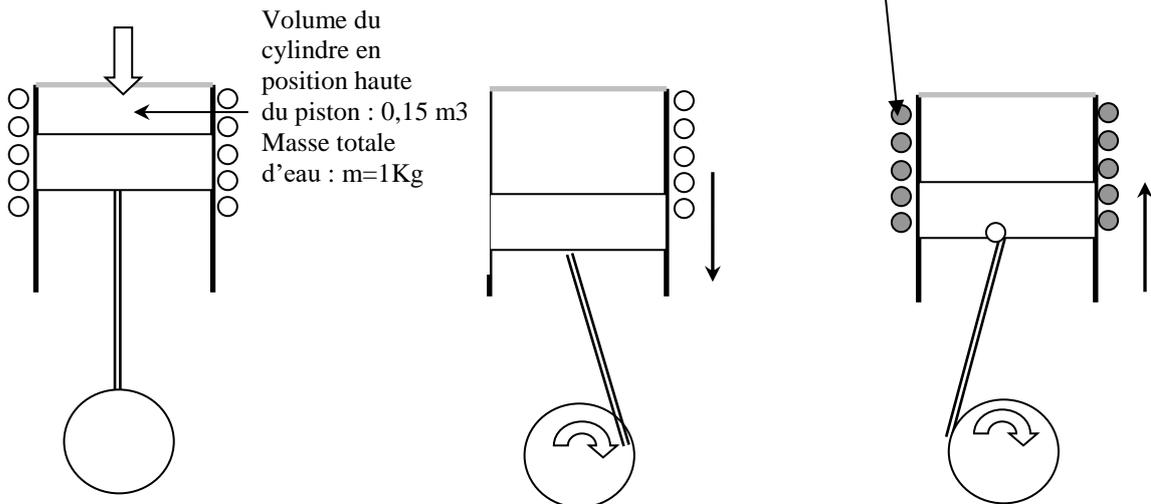
La température finale de vaporisation est de $T_2 = 453^\circ\text{C}$

La température de condensation est $T_1 = 293^\circ\text{C}$.

Chauffage : le dessus du cylindre
laisse passer le rayonnement solaire

Pas de chauffage

Pas de chauffage mais
refroidissement du cylindre



Volume du
cylindre en
position haute
du piston : 0,15 m³
Masse totale
d'eau : m=1Kg

**1-Vaporisation de l'eau
à volume constant**
(la bielle est bloquée)
de $T_1 = 293 \text{ K}$ à $T_2 = 453 \text{ K}$

2-détente isentrope
de 453 K à 293 K

3-condensation
à $T_1 = 293 \text{ K}$

Important : le volume du cylindre au cours de la vaporisation (1^{er} temps) est de 0,15m³ et la masse totale d'eau est de 1kg. La capacité calorifique massique c de l'eau liquide est supposée constante et égale à $4,18 \cdot 10^3 \text{ J/Kg}$.

Comme précédemment, on se permet de négliger v_l devant v_v dans les calculs.

6°) On admet que la vapeur d'eau est un gaz parfait et qu'elle est toujours en équilibre avec le liquide.

Calculer le volume massique de la vapeur à 293K et 453K.

En déduire les titres $x_{v,1}$ et $x_{v,2}$ de la vapeur au début et à la fin de la vaporisation

7°) On note $u(x_v, T)$ l'énergie interne massique d'un mélange liquide-vapeur, avec x_v le titre massique de vapeur, $s(x_v, T)$ son entropie. On considère que ce mélange est obtenu par chauffage isobare à partir de l'eau liquide à T_0 . Exprimer $u(x_v, T)$ et $s(x_v, T)$ en fonction des paramètres d'état à T . On notera u_0 l'énergie interne de l'eau liquide à T_0 et s_0 son entropie.

8°) Calculer la valeur numérique de la chaleur reçue par le mélange liquide-vapeur au cours de la vaporisation

9°) Calculer la valeur numérique du titre de la vapeur en fin de détente

10°) Calculer la valeur numérique de la chaleur échangée au cours de la condensation

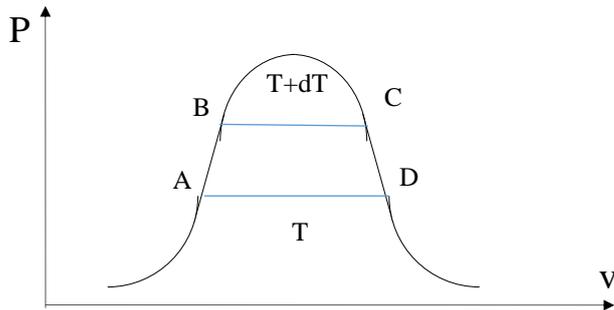
11°) En déduire le rendement du moteur

Réponses

Questions de cours

1°) $dg = du + dPv + dTs = -sdT + vdP$

2°)



Rappel : à l'équilibre liquide vapeur, les enthalpies libres des phases sont égales

$$g_A = g_D$$

$$g_B = g_C \text{ donc } g_A + dg_A = g_D + dg_D$$

$$\implies dg_A = dg_D$$

$$\implies -s_l dT + v_l dP = -s_v dT + v_v dP$$

$$(s_v - s_l) dT = (v_v - v_l) dP$$

Sur le palier de changement d'état à T : $\Delta s = s_v - s_l = L_{\text{vap}} / T$

$$\implies L_{\text{vap}} = T(v_v - v_l) dP/dT. \text{ Mais } P = P_{\text{vap}} \text{ sur le palier de changement d'état}$$

On retrouve la formule

Erreur relative de l'hypothèse 'gaz parfait' pour la vapeur d'eau

3°) $\ln(P_{\text{vap}}) = A - 5120/T$, donc $\ln(1) = A - 5120/373$, $A = 13,726$ (SI)

4°) relation de Rankine $\implies dP_{\text{vap}}/P_{\text{vap}} = 5120 dT/T^2$

Chaleur latente de vaporisation $\implies L_{\text{vap}} = 5120 v_v P_{\text{vap}}/T$

A.N. : à 293K, $P_{\text{vap}} = 2360$ Pa et $v_v = 60,2$ m³/kg

5°) Si la vapeur d'eau est un gaz parfait : $P_{\text{vap}} v_v = rT$

A.N. : à 293K, $v_v = 57,4$ m³/kg, écart relatif par rapport à la valeur précédente : 4,7%

Application à l'étude d'un moteur à vapeur d'eau

6°) $v_v = rT/P_{\text{vap}}$, à 293K $v_v = 57,4$ m³/kg

à 453K $P_{\text{vap}} = 11,29 \cdot 10^5$ Pa et $v_v = 0,185$ m³/kg

soit V le volume total d'un mélange liquide vapeur

$$V(\text{m}^3) = V_v + V_l = m_v v_v + m_l v_l$$

Par définition le titre en vapeur est $x_v = m_v / (m_v + m_l) = m_v / m_{\text{Tot}}$

$$\text{Donc } V(\text{m}^3) = m_{\text{Tot}} (x_v v_v + (1 - x_v) v_l)$$

$$\implies x_v = [V/m_{\text{Tot}} - v_l] / (v_v - v_l)$$

Comme précédemment, on se permet de négliger v_l devant v_v .

à 293K $x_v = 0,26$ %, peu de vapeur

à 453K $x_v = 81,3$ %

7°) calcul de $u(T, x_v)$ à l'aide de deux transformations :

T0, eau liquide \rightarrow P_{vap}, T, eau liquide \rightarrow P_{vap}, T, mélange liquide-vapeur

Echange par unité de masse : $c(T - T_0) + x_v L_{\text{vap}}(T) + W_{\text{vap}}$

On montre facilement que $W_{\text{vap}} = -P_{\text{vap}}(v_{\text{mél}} - v_l) = -P_{\text{vap}} x_v (v_v - v_l)$

$$\implies \Delta u = u(T, x_v) - u_0 = c(T - T_0) + x_v L_{\text{vap}}(T) - P_{\text{vap}} x_v (v_v - v_l)$$

$$u(T, x_v) = u_0 + c(T - T_0) + x_v L_{\text{vap}}(T) - P_{\text{vap}} x_v (v_v - v_l)$$

Avec les deux même transformations, on trouvera pour $s(T, x_v)$

$$s(T, x_v) = s_0 + c \ln(T/T_0) + x_v L_{\text{vap}}(T)/T$$

8°) Etape 1 de vaporisation : $\Delta u = q_C + w = w$, pas de travail échangé

A l'aide de la formule de $u(T, x_v)$ précédente, on obtient

$$Q_C = u(T_2, x_{v2}) - u(T_1, x_{v1}) = 2131,7 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$$

9°) Titre x_{v3} en fin de détente : $\Delta s = 0$, d'après l'énoncé, donc $s(T_2, x_{v2}) = s(T_3, x_{v3})$

$$\implies c \ln(T_2/T_1) + x_{v2} L_{\text{vap}}(T_2)/T_2 = x_{v3} L_{\text{vap}}(T_1)/T_1$$

$$x_{v3} = 64,2 \%$$

10°) Chaleur de refroidissement : $q_F = \Delta x_v L_{\text{vap}}(T_1) = -1593 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$

11°) $W^{\text{cycle}} = -Q_C - Q_F$; $r = -W^{\text{cycle}} / Q_C = 25,3\%$